συντελεστές από δω 21/4/20

<u>Νδο</u> $\mathbb{Q}$ δεν είναι ελεύθερο $\mathbb{Z}$-μόδιο.

Αρχικά, παρατηρώ ότι κάθε 2 στοιχεία του $\mathbb{Q}$ είναι γρ. εξαρτ.
Έστω αντίθετα ότι $\exists\ \frac{a}{\beta}, \frac{\gamma}{\delta} \in \mathbb{Q}$ γρ. ανεξ. (υπ του $\mathbb{Z}$

μη μηδενικά

$$\frac{a}{\beta} + \frac{\gamma}{\delta} = 0 \Rightarrow \underset{\substack{\neq \\ 0 \\ \cap \mathbb{Z}}}{\beta\gamma} \frac{a}{\beta} + \underset{\substack{\neq \\ 0 \\ \cap \mathbb{Z}}}{(-\delta a)} \frac{\gamma}{\delta} = 0$$

Μένει νδο το $\mathbb{Q}$ δεν έχει βάση που να αποτελείται από 1 στοιχείο.
Έστω ότι $\exists\ \underset{\beta \neq 0}{\frac{a}{\beta}} \in \mathbb{Q} : \mathbb{Q} = \langle \frac{a}{\beta} \rangle$

Θεωρώ το $\frac{1}{\gamma}$ όπου $\gamma \nmid \beta$

$$\frac{1}{\gamma} = \kappa \frac{a}{\beta} \Leftrightarrow \beta = \kappa \cdot a \cdot \gamma \Rightarrow \gamma \mid \beta \text{ άτοπο!}$$

Άρα, $\mathbb{Q}$ δεν είναι ελεύθερο $\mathbb{Z}$-μόδιο.

<u>ΣΤΟΧΟΣ Α'</u>: Θδο κάθε R-μόδιος M μπορεί να γραφεί ως πηλίκο-μόδιος ενός <u>ελεύθερου</u> R-μόδιου
$M = \cancel{\quad}$ ελεύθερο

<u>Θεώρημα 1</u>: Έστω F ελεύθερος R-μόδιος με βάση $B \subseteq F$ και M τυχαίος R-μόδιος. Έστω $\{m_\beta,\ \beta \in B\}$ στοιχεία του $M \Rightarrow$ υπάρχει μοναδικός R-ομομορφισμός
$\varphi : F \to M$ με $\beta \longmapsto m_\beta$, $\varphi(\beta) = m_\beta\ \forall \beta \in B$

<u>μοναδικότητα</u>
Έστω ότι $\exists$ ένος τέτοιος ομομορφ.
$\varphi : F \to M$, $\beta \longmapsto \varphi(\beta) = m_\beta$

Καθώς όμως, κάθε στοιχείο $x \in F$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο $x = \sum_{\beta \in B} \beta r_\beta$

άρα, $\varphi(x) = \varphi\left(\sum \beta r_\beta\right) = \sum \varphi(\beta) r_\beta = \sum m_\beta r_\beta$

Θεωρώ την απεικόνιση $\varphi : F \to M$

$$\underset{\sum_{\beta \in B} \beta r_\beta}{\overset{\psi}{x}} \mapsto \varphi\left(\sum \beta r_\beta\right) = \sum m_\beta r_\beta$$

Θδο είναι R-ομομορφισμός

Λόγω της μοναδικότητας της γραφής είναι καλά ορισμένη

- $x = \sum_{\beta \in B} \beta r_\beta \in F$, $y = \sum_{\beta \in B} \beta r'_\beta \in F$

$$\varphi(x+y) = \varphi\left(\sum_{\beta \in B} \beta r_\beta + \sum_{\beta \in B} \beta r'_\beta\right)$$

$$= \varphi\left(\sum_{\beta \in B} \beta (r_\beta + r'_\beta)\right) = \sum_{\beta \in B} m_\beta (r_\beta + r'_\beta)$$

$$= \underbrace{\sum m_\beta r_\beta}_{= \varphi(x)} + \underbrace{\sum m_\beta r'_\beta}_{= \varphi(y)}$$

- $x = \sum_{\beta \in B} \beta r_\beta \in F$, $r \in R$

$$\varphi(rx) = \varphi\left(r \sum \beta r_\beta\right) = \varphi\left(\sum r \beta r_\beta\right)$$
$$= \sum r m_\beta r_\beta = r \sum m_\beta r_\beta = r\varphi(x)$$

$\varphi : F \to M$

$\beta \longmapsto m_\beta \to$ στοιχεία γεννήτορες του M.

Θεώρημα 2: Για κάθε R-μόδιο M υπάρχει ένας επιμορφισμός R-μοδίου $\varphi : F \to M$, όπου F ελεύθερος R-μόδιος

Θεωρώ $X \neq \emptyset$ ένα σύνολο γεννητόρων του M

Σχηματίζουμε τον ελεύθερο R-μόδιο

$F = \bigoplus_{x \in X} R_x$ / κάθε R-μόδιο R είναι ελεύθερο $\Rightarrow R^K = \bigoplus_{\beta \in R} R$

η απεικόνιση $\varphi: \mathcal{E} \to X$, $e_x \mapsto x$ όπου $\mathcal{E}$ η κανονική βάση του F και X το σύνολο γεννητόρων του M.

επεκτείνεται σε έναν R-επιμορφισμό

$\varphi: \underbrace{F}_{=\bigoplus R_x} \to M$ → είναι επί, καθώς για κάθε $y \in M$ το y γράφεται ως συνδυασμός των γεννητόρων του M.

$\sum_{x \in X} e_x r_x \mapsto \sum x r_x$

$\varphi: \underbrace{F}_{=\bigoplus R_x} \to M$, X σύνολο γεννητόρων του M

επιμορφισμός $\overset{1\Theta}{\Longrightarrow}$ $F/\ker\varphi \simeq M$

→ τυχαίο R-μόδιο

Άρα, το M γράφτηκε ως μόδιο-πηλίκο ενός ελεύθερου μοδίου F.

Η δομή ενός ελεύθερου R-μοδίου είναι απλή

Θεώρημα: Έστω ελεύθερος R-μόδιος F και B μία βάση αυτού

$\Rightarrow F = \bigoplus_{\beta \in B} R_\beta$, $\forall \beta \in B$, όπου $R_\beta = R$

Σύμφωνα με τα προηγούμενα,

Θεωρώ την απεικόνιση

$\varphi: B \to \mathcal{E}$, B η βάση του F

$\beta \mapsto e_\beta$, $\mathcal{E}$ η κανονική βάση

επεκτείνεται σε έναν

R-επιμορφισμό (σύμφωνα με Θ.1, 2)

$\varphi : F \to \bigoplus_{\beta \in B} R_\beta$

έχουμε από θ1 → ομομ
θ2 → επί

$\sum \beta r_\beta \longmapsto \sum \varepsilon_\beta r_\beta$

Μένει νδο φ 1-1 $\Leftrightarrow$ $Ker\varphi = \{0_R\}$

Έστω $a \in Ker\varphi$

$\underset{\beta \in B}{\sum} \overset{=}{\beta r_\beta} \Rightarrow \varphi\left(\sum \beta r_\beta\right) = 0$

$\Rightarrow \sum \varepsilon_\beta r_\beta = 0 \xRightarrow{\varepsilon \text{ βάση}} r_\beta = 0 \quad \forall \beta \in B.$

άρα $a = \sum \beta r_\beta = 0$

άρα και 1-1 $\Rightarrow$ ισομορφισμός

$\Rightarrow \boxed{F \simeq \bigoplus_{\beta \in B} R_\beta}$ ■

1) $M \simeq F/Ker\varphi$, $\varphi : F \to M$

2) $F = \bigoplus_{\beta \in B} R_\beta$

$M = R^k / Q$, Ann

1), 2) $\Rightarrow$ $M = \bigoplus R_\beta / Ker\varphi$.

R-μόδιο

Πρόταση 1: Κάθε δύο βάσεις ενός πεπερασμένα παραγόμενου δ.χ. έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων.

Πρόταση 2 (2α): Κάθε δακτύλιος έχει τουλάχιστον ένα μέγιστο ιδεώδες.

(2β) I μέγιστο ιδεώδες του R $\Leftrightarrow$ R/I σώμα.

Πρόταση 3: Έστω F ένα R-μόδιο. Τότε, το $F/I \cdot F$ είναι R/I-μόδιο, όπου $I \cdot F = \{af,\ a \in I,\ f \in F\}$

με εξ. πολλ/μό

$$R/I \times F/IF \longrightarrow F/IF$$
$$(r+I,\ f+IF) \longmapsto rf+IF$$

Θεώρημα: Έστω R μεταθετικός δακτύλιος και F ελεύθερο R-μόδιο, όπου η βάση αυτού είχει n στοιχεία. Τότε, κάθε βάση του F είχει n στοιχεία (γενικά δεν ισχύει!)

Έστω $\{e_1, \dots, e_n\}$ βάση του F με n στοιχεία
Από (2a), έστω M ένα μέγιστο ιδεώδες του R
Από πρόταση 3, το F/MF είναι ένα R/M-μόδιο

Από (2β), το R/M είναι σώμα

άρα, το F/MF είναι ένας R/M δ.χ.

Ισχυρισμός: Το σύνολο $\{e_1+MF, e_2+MF, \dots, e_n+MF\}$ είναι βάση του δ.χ. F/MF.

Έστω ότι το αποδείξαμε.
Άρα, δύο οποιεσδήποτε βάσεις του F/MF, από πρόταση 1, έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων.

Έστω ότι το F έχει κι άλλη βάση με k στοιχεία $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k\}$
$\Rightarrow$ το F/MF

είναι δ.χ. $\Rightarrow n=k$

αν $F \to \{e_1, \dots, e_n\} \Rightarrow F/MF \to \{e_1+MF, \dots, e_n+MF\}$
$F \to \{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k\} \Rightarrow F/MF \to \{\varepsilon_1+MF, \dots, \varepsilon_k+MF\}$

Η βάση του $F \to \{e_1, \dots, e_n\}$ Ισχ. βάση του F/MF $\{e_1+MF, \dots, e_n+MF\}$

όπου M μέγιστο ιδ. του f

Αρχικά δδο παράγουν τον χώρο F/MF

Έστω τυχαίο $x + MF \in F/MF$, $x \in F$

$$\xRightarrow[\text{βάση } F]{\{e_1,\dots,e_n\}} (r_1e_1 + \dots + r_ne_n) + MF = \underset{\sim}{x} + MF$$
$$= (r_1e_1 + MF) + (r_2e_2 + MF) + \dots + (r_ne_n + MF)$$
$$= r_1(e_1 + MF) + \dots + r_n(e_n + MF)$$

Θδο είναι $R/_M$ Γ.Α. F/MF είναι $R/_M$ δ.χ

Έστω ένας R/M συνδυασμός $= 0$ και δδο οι συντελ $= 0$

$$(r_1+M)(e_1 + MF) + (r_2+M)(e_2 + MF) + \dots + (r_n+M)(e_n + MF) = (0 + MF) \quad r_i \in R$$

$R/I \times F/IF \to F/IF$

Μένει νδο $r_i + M = 0 + M$

$$(r_1e_1 + MF) + (r_2e_2 + MF) + \dots + (r_ne_n + MF) = 0 + MF$$

$$\Sigma r_ie_i + MF = 0 + MF$$
$$\Leftrightarrow \Sigma r_ie_i \in MF \ (= mf, \text{ όπου } f \in F)$$
$$= m\Sigma r_i e_i$$
$$\Leftrightarrow \Sigma r_ie_i = \Sigma (mr_i')e_i$$ Αλλά e_i βάση του F άρα, η γραφή μοναδική

$r_i \equiv mr_i' \in M$

$r_i + M = 0 + M$

και άρα τα $\{e_1 + MF, \dots, e_n + MF\}$ είναι R/M Γ.Α.

F	F/MF (είναι R/M δ.χ.)
$\{e_1, \dots, e_n\}$	$\to \{e_1 + MF, \dots, e_n + MF\}$
$\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k\}$	$\to \{\varepsilon_1 + MF, \dots, \varepsilon_k + MF\}$

από πρόταση 1) $\boxed{n = k}$